$$L[y] = y'' + P_1 y' + P_0 y = f(x)$$

$$\downarrow \quad e^{\int P_1(x)\,dx}$$

$$L[y] = \frac{d}{dx}(p y')' + q y$$

عملگر استورم - لیوویل

$$-y'' = \lambda y \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = 0$$

مقدار ویژه نیست

$$\lambda_n = n^2 \quad , \quad \phi_n(x) = \sin(nx)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$L \to$ self-adjoint $\to$ λ real

$\to$ eignfunction orthogonal

$$\langle u, Lv \rangle = (L^{*} u, v)$$

$$L\phi = \lambda \phi \longrightarrow \phi \not\equiv 0$$

$$\langle \phi, L\phi \rangle = \langle L\phi, \phi \rangle$$

$$\langle \phi, \lambda \phi \rangle = \langle \lambda \phi, \phi \rangle$$

$$\bar{\lambda} (\phi, \phi) = \lambda (\phi, \phi)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{(\phi, \phi)}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \text{ real}$$

$$\lambda_n \neq \lambda_m$$

$$\forall \quad \lambda_n , \phi_n \qquad \lambda_m , \phi_m$$

$$\langle \phi_n , \phi_m \rangle = 0$$

$$\begin{cases} L\phi_n = \lambda_n \phi_n \\ L\phi_m = \lambda_m \phi_m \end{cases}$$

$$(\phi_n , L\phi_m) = (L\phi_n , \phi_m)$$

$$(\phi_n , \lambda_m \phi_m) = (\lambda_n \phi_n , \phi_m)$$

$$\bar{\lambda}_m (\phi_n , \phi_m) = \lambda_n (\phi_n , \phi_m)$$

$$\underbrace{(\lambda_n - \bar{\lambda}_m)}_{\neq 0} (\phi_n , \phi_m) = 0 \Rightarrow (\phi_n , \phi_m) = 0$$

ϕ_n ، ϕ_m بر هم عمودند.

$$L[y] = (py')' + qy = \lambda y$$ مسئله مقدار ویژه

$$a \le x \le b$$

$$\overline{(x,y)} = (y,x)$$

شرایط مرزی : $B_j[y] = 0$

λ_n eignvalue $\quad \phi_n$ eignfunction : $L\phi_n = \lambda \phi_n$

$$(\phi_n, L\phi_n) = (\phi_n, \lambda_n \phi_n)$$

$$(\phi_n, (p\phi_n')' + q\phi_n) = \bar{\lambda}_n (\phi_n, \phi_n)$$

$$((p\phi_n')' + q\phi_n, \phi_n) = \lambda_n (\phi_n, \phi_n)$$

$$\lambda_n = \frac{((p\phi_n')' + q\phi_n, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}$$

$$-y'' = \lambda y, \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

$$-y'' = \lambda y$$

$$(-1 \times y')' = \lambda y \;\rightarrow\; p = -1, \quad q = 0$$

$$\lambda_n = \frac{((p\phi_n')' + q\phi_n, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{(-\phi_n'', \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}$$

$$= \frac{-\phi_n' \phi_n \Big|_0^{\pi} + (\phi_n', \phi_n')}{(\phi_n, \phi_n)} = \frac{(\phi_n', \phi_n')}{(\phi_n, \phi_n)} \geq 0$$

$$(x, x) \geq 0$$

$$\lambda_n = 0 \Rightarrow (\phi_n', \phi_n') = 0$$

$$\int_0^{\pi} (\phi_n')^2 \, dx = 0 \Rightarrow \phi_n' = 0 \Rightarrow \phi_n = \text{ثابت}$$

$$\phi_n = 0 \leftarrow \text{شرایط مرزی}$$

Fourier Series:

$$\left\{ \frac{1}{2},\ \sin nx,\ \cos nx \right\}_{n=1}^{\infty} \qquad (-\pi, \pi) \longrightarrow \text{[illegible]}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\cos mx \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx \, dx$$

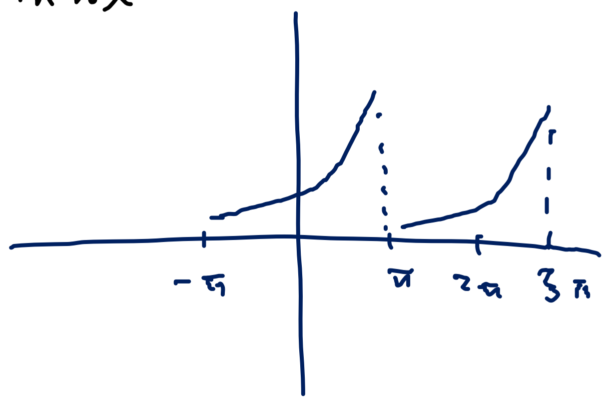
به طور مشابه با ضرب سری به $\sin mx$ و انتگرال گیری داریم

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

دوره تناوب، مشترک 2π

سری فوریه تابع f

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{cases}$$

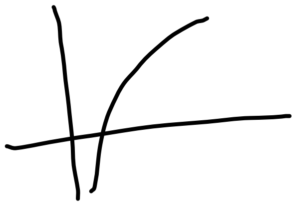


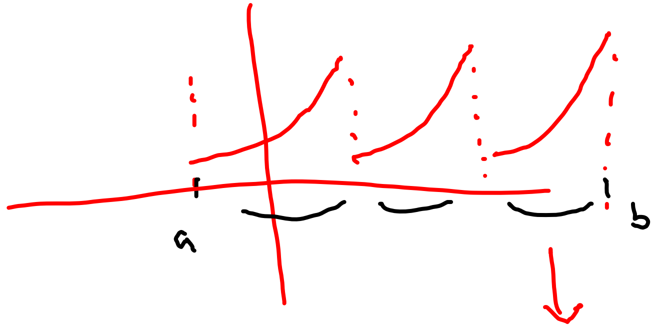
$$f(x) = e^{x}, \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$f(x) = e^{x}, -\pi < x < \pi$

سری فوریه





توابع تکه‌ای پیوسته

تعریف: تابع f را در بازه $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته گوییم هرگاه f به غیر از یک تعداد متناهی نقطه در $[a,b]$ در بقیه نقاط آن پیوسته باشد و حدود چپ و راست آن در تمام نقاط متناهی باشد.

$$[a,b] = (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \cdots$$

$$f(x) = x \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x\cos nx}_{\text{فرد}}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x\sin nx}_{\text{زوج}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

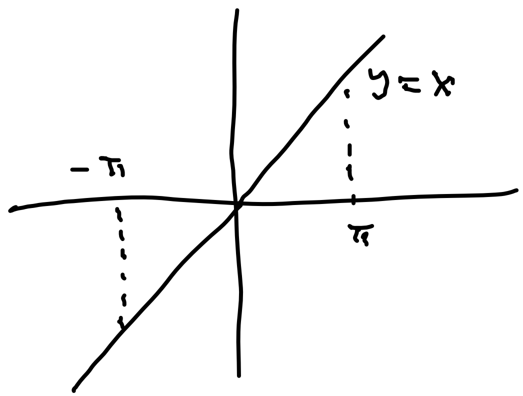
$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right\}_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right\} = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$+$	x	$\sin nx$
$-$	1	$-\frac{1}{n}\cos nx$
	0	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \cos nx}_{0} + b_n \sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx = 2\left\{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right\}$$



```
clc
clear all;
f = inline('x');
x = linspace(-pi,3*pi,200);
x1 = linspace(-pi,pi,100);
x2 = linspace(pi,3*pi,100);
y = [f(x1),f(x1)];

plot(x,y,'r-');
hold on;
S = 2*sin(x);
for k=2:20
   plot(x,S); hold on;
   S = S -2/k*(-1)^k*sin(k*x);
   pause;
end
```

قضیه همگرایی سری فوریه:

اگر تابع f در بازه $[-\pi, \pi]$ تکه‌ای پیوسته و متناوب با دوره تناوب 2π باشد و دارای مشتقات چپ و راست متناهی باشد در این صورت سری فوریه تابع f در هر نقطه x به میانگین حد چپ و راست f در آن نقطه همگرا است:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \longrightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$$2\left\{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right\} = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$$

تمرین : سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - 2x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

را نوشته و از قضیه همگرایی سری فوریه مجموع سری فوریه را بدست آورید.